Министерство науки и высшего образования РФ

ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»

Инженерно-физический факультет высоких технологий

Учайкин В.В.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ»

для студентов 1 курса магистратуры инженерно-

физического факультета высоких технологий

УЛЬЯНОВСК, 2019

Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Современные проблемы физики»/составитель: В.В.Учайкин. – Ульяновск: УлГУ, 2019.

Настоящие методические указания предназначены для студентов 1 курса магистратуры инженерно-физического факультета высоких технологий всех форм обучения, изучающих дисциплину «Современные проблемы физики». В работе даются основные понятия, теоремы, формулы; приводятся задания для самостоятельной работы с указаниями к их выполнению.

Студентам заочной формы обучения следует использовать данные методические указания при самостоятельном изучении дисциплины. Студентам очной формы обучения они будут полезны при подготовке к практическим занятиям, к экзамену и зачету по данной дисциплине.

Рекомендованы к введению в образовательный процесс Ученым советом Инженерно-физического факультета высоких технологий УлГУ (протокол № 11 от 18 июня 2020 г.).

1. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1.1. Интегральные преобразования.

Одним из наиболее плодотворных методов аналитической теории переноса является метод интегральных преобразований. Сущность этого метода состоит в том, что исследование функции ***f(x)*** заменяется исследованием интегрального преобразования (трансформанты). При этом часто оказывается, что сложные уравнения для ***f(x)*** превращаются простые соотношения для её трансформанты. В теории переноса широко используются преобразования Лапласа, Фурье, Хенкеля, Меллина и др. [5,9,11].

1.2. Преобразование Лапласа[5]

Пусть функция ***f(x)*** определена на всей оси и интеграл

$$\tilde{f}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\lambda x}\,dx \quad (2.1.)$$

где λ – комплексный параметр, сходится хотя бы на одной прямой $\Re\lambda=c$. Тогда функцию $\tilde{f}(\lambda)$ называют двусторонним преобразованием Лапласа функции ***f(x)*** и обозначают это соотношение формулой $f(x)-\tilde{f}(\lambda)$. Двустороннее преобразование Лапласа аналогично ряду Лорана, областью его сходимость является полоса $a\le Re\lambda\le b$, которая может вырождаться в прямую при $a=b$.

Если функция ***f(x)*** определена при ***x>0*** в интеграл

$$\tilde{f}(\lambda)=\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-\lambda x}\,dx \quad (2.2.)$$

Сходится, то функция $\tilde{f}(\lambda)$ называют односторонним преобразованием Лапласа функции ***f(x)*** и обозначают это соотношение формулой $f(x)\div\tilde{f}(\lambda)$. Мы предполагаем, что интеграл (2.2.) сходится на нижнем пределе. Если интеграл сходится на верхнем пределе при определенном значении $\lambda=\lambda_\alpha, \Re\lambda_a=a$, то он сходится так же при всех λ, для которых $\Re\lambda_a>a$. С другой стороны, если интеграл (2.2) расходится при определенном $\lambda=\lambda_{\alpha'}, \Re\lambda_{a'}=a'$, то он расходится также при всех λ, для которых $\Re\lambda_a<a'$, таким образом, в общем случае $\tilde{f}(\lambda)$ определена в полуплоскости справа от прямой, параллельной мнимой оси.

Одностороннее преобразование имеет сходство со степенным рядом, понятие полуплоскости сходимости аналогично понятию круга сходимости степенного ряда.

Большое значение имеет формула, позволяющая восстановить функцию ***f(x)*** по её трансформанте $\tilde{f}(\lambda)$. Она аналогична формулам для коэффициентов ряда Лорана и называется формулой обращения. Формула обращения имеет один и тот же вид как для двустороннего, так и для одностороннего преобразований:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\tilde{f}(\lambda)e^{\lambda x}\,d\lambda,\ a\le c\le b \quad (2.3)$$

поскольку одностороннее преобразование можно рассматривать как двустороннее от функции, равной нулю при отрицательных ***x***(напомним, что формулы для коэффициентов ряда Тейлора и ряда Лорана тоже имеют вид одинаковый вид). При этом налагаются определенные условия на $\tilde{f}(\lambda)$ (*или* $f(x)$): $\tilde{f}(\lambda)$ должна быть регулярной в полосе $a \le Re\lambda \le b$ и удовлетворять условию

$$\tilde{f}(\lambda)=O\left(|\lambda|^{-\alpha-1}\right), 0<\alpha<1, \lambda\to\infty, a\le Re\lambda\le b$$

(или ***f(x)*** должна быть непрерывной на всей оси за исключением отчётного множества точек разрыва, не имеющего предельных точек на конечном расстоянии, и удовлетворить условиям:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\left(e^{-ax}+e^{-bx}\right)dx<\infty,$$

$$\left|f(x')-f(x)\right|<M\left|x'-x\right|^{\alpha}, 0<\alpha\le 1 \text{ } для\, всех\, x' \, в\, окрестности\, точки\, x \text{ }).$$

В случае одностороннего преобразования $b=\infty$, т.е. контур интегрирования в (2.3) лежит справа от всех полюсов и особых точек функции $\tilde{f}(\lambda)$.

Формулы преобразования Лапласа функций многих переменных имеют вид

$$\tilde{f}(\vec{\lambda})=\int f(\vec{x})e^{-\vec{\lambda}\vec{x}}d\vec{x}, \qquad (2.4)$$

$$f(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\vec{c}-i\infty}^{\vec{c}+i\infty}\tilde{f}(\vec{\lambda})e^{\vec{\lambda}\vec{x}}d\vec{\lambda} \qquad (2.5)$$

Где

$$x=(x_1,...,x_n), dx=dx_1...dx_n, \lambda x=\lambda_1 x_1+...+\lambda_n x_n,$$

$$\int_{\vec{c}-i\infty}^{c+i\infty}d\vec{\lambda}=\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}d\lambda_1...\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}d\lambda_n$$

Отметим следующие свойства двустороннего преобразования Лапласа $F(x)\div\tilde{F}(\lambda)$:

a) Если $F(x)=df/dx$, то $\tilde{F}(\lambda)=\lambda\tilde{f}(\lambda)$,
b) Если $F(x)=xf(x)$, то $\tilde{F}(\lambda)=-d\tilde{f}/d\lambda$,
c) Если $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x')dx'$, то $\tilde{F}(\lambda)=\tilde{f}(\lambda)/d\lambda$,
d) $\left[d^n\tilde{f}/d\lambda^n\right]_{\lambda=0}=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}x^n f(x)dx$

И аналогичные свойства преобразования Лапласа $F(x)\div\tilde{F}(\lambda)$:

a) Если $F(x)=df/dx$, то $\tilde{F}(\lambda)=\lambda\tilde{f}(\lambda)-f(0)$,

b) Если $F(x)=xf(x)$, то $\tilde{F}(\lambda)=-\tilde{f}'(\lambda)$,

c) Если $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x')\,dx'$, то $\tilde{F}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\left[\tilde{f}(\lambda)-f(0)\right]$,

d) $\left[d^n\tilde{f}/d\lambda^n\right]_{\lambda=0}=(-1)^n\int_0^{\infty} x^n f(x)\,dx$

1.3. Преобразование Фурье.

Преобразованием Фурье функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой по всей оси, называется функция

$$\tilde{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{ikx}dx \qquad (3.1)$$

где k – вещественный параметр. Если $\tilde{F}(\lambda)$ - двустороннее преобразование Лапласа той же функции $f(x)$, то, очевидно, $\tilde{f}(k)=\tilde{F}(-ik)$. Из этого соотношения легко выводятся все свойства преобразований Фурье с помощью свойств преобразований Лапласа (и наоборот). Например, формула обращения преобразования Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)\,e^{-ikx}dk \qquad (3.2)$$

Подставив сюда $\tilde{f}(k)$ из первой формулы, изменив порядок интегрирования и воспользовавшись соотношением

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x')\,f(x')\,dx' \qquad (3.3)$$

Получим интегральное представление δ-функции

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk \qquad (3.4)$$

Приведенные формулы допускают обобщение на случай функций n переменных

$$\tilde{f}(\vec{k})=\int f(\vec{x})\,e^{i\vec{k}\vec{x}}d\vec{x}$$

$$f(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\tilde{f}(\vec{k})\,e^{-i\vec{k}\vec{x}}d\vec{k}$$

$$\delta(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\vec{k}\vec{x}}d\vec{k} \qquad (3.5\text{-}3.7)$$

1.4. Преобразование Фурье-Бесселя(Ханкеля)

Применим двумерное преобразование Фурье к азимутально симметричной функции $f(x) = f(r), \quad r = |x|$, получим преобразование Фурье-Бесселя

$$\tilde{f}(k) = 2\pi \int_0^\infty f(r) J_0(kr) r dr,$$

$$f(r) = 2\pi \int_0^\infty \tilde{f}(k) J_0(kr) k dk, \qquad (4.1\text{-}4.2.)$$

где

$$J_0(kr) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ikr\cos\varphi} d\varphi, \quad k = |\vec{k}| \qquad (4.3)$$

- функция Бесселя нулевого порядка. Из (4.1) – (4.2) следует свойство ортогональности

$$\int_0^\infty J_0(kr) J_0(kr') k dk = \frac{\delta(r - r')}{r} \qquad (4.4)$$

1.5. Преобразование Меллина.

Преобразование Меллина функции $f(y)$, определенных при положительных y, дается формулой

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(y) y^S dy \qquad (5.1)$$

где s – комплексный параметр. Если этот интеграл расходится на нижнем пределе при определенном значении $s = s_a (\operatorname{Re} s_a = a)$ то он расходится при всех s, для которых $\operatorname{Re} s < a$. Если интеграл расходится на верхнем пределе при определенном $s = s_b$, то он расходится и при всех значениях s, для которых $\operatorname{Re} s > b$. Таким образом , если интеграл Меллина где-нибудь сходится, то область его сходимости представляет собой полосу, ограниченную двумя прямыми, параллельными мнимой оси.

Если обозначить через $\tilde{F}(\lambda)$ двустороннее преобразование Лапласа функции $f(e^x)$, то получим $\tilde{f}(s) = \tilde{F}(-s-1)$. Это соотношение тоже позволяет вывести все формулы и свойства преобразования Меллина из формул и свойств преобразования Лапласа. В частности, формула обращения имеет вид

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s) y^{-s-1} ds, \quad (y > 0), \qquad (5.2)$$

где контур интегрирования представляет собой прямую, параллельную мнимой оси и расположенную внутри полосы сходимости.

Имеют место следующие свойства:

a) Если $F(y)=\dfrac{df}{dy}$, то $\tilde F(s)=-s\tilde f(s-1)$.

b) Если $F(y)=yf(y)$, то $\tilde F(s)=\tilde f(s+1)$.

c) Если $F(y)=\int\limits_0^y f(y')\,dy'$, то $\tilde F(s)=-\dfrac{1}{s+1}\tilde f(s+1)$.

Отправляясь от одностороннего преобразования Лапласа, получим преобразования Меллина в виде

$$\tilde f(s)=\int\limits_0^1 f(y)\,y^s dy$$

с той же формулой обращения (5.2).

1.6. Теоремы о свертках[5]

Сверткой функции $g(x)$ и $h(x)$, определенных на всей оси, называется функция

$$g(x)\ast h(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x-x')\,h(x')\,dx'. \qquad (6.1)$$

Сверткой функций $g(x)$ и $h(x)$, определенных при x>0, называется функция

$$g(x)\ast h(x)=\int\limits_0^x g(x-x')\,h(x')\,dx'. \qquad (6.2)$$

В обоих случаях трансформанта (Фурье или Лапласа) свертки $f(x)=g(x)\ast h(x)$ равна произведению трансформант:

$$\tilde f(k)=\tilde g(k)\,\tilde h(k). \qquad (6.3)$$

При переходе к преобразованию Меллина формула для свертки принимает вид

$$f(y)=\int\limits_0^{\infty} g\left(\frac{y}{y'}\right)h(y')\,\frac{dy'}{y'} \qquad (6.4)$$

Меняя порядок интегрирования, легко убедиться, что

$$\tilde f(s)=\tilde g(s)\,\tilde h(s) \qquad (6.5)$$

Аналогичным образом легко проверить, что преобразование Меллина функции

$$F(y)=\int\limits_0^{\infty} g(yy')\,h(y')\,y'dy' \qquad (6.6)$$

Имеет вид

$$\tilde{F}(s) = \tilde{g}(s)\tilde{h}(-s) \tag{6.7}$$

Вместе с приведенными выше свойствами интегральных преобразований теоремы о свертках могут указать наиболее подходящее преобразование для минимального упрощения интегродифференциального уравнения переноса.

1.7. Метод обращения.

После того, как с помощью интегральных преобразований исходное уравнение приведено к виду, который допускает простое решение, и это решение найдено, возникает проблема обратного преобразования(обращения), сводящаяся к вычислению несобственного интеграла в комплексной плоскости по прямой, параллельной мнимой оси, типа

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(\lambda)e^{\lambda x}d\lambda \tag{7.1}$$

Лишь в редких случаях интеграл (7.1) удается вычислить непосредственным интегрированием. Мощным средством вычисления таких интегралов является метод вычетов, однако он применяется только для замкнутых контуров. Замкнуть контур интегрирования в (7.1) помогает

Лемма Жордана: для любой функции $\tilde{f}(\lambda)$, стремящейся на $C_R\left(C_{R'}\,|\lambda| = R,\quad \mathrm{Re}\,\lambda < a\right)$ к нулю при R→∞ равномерно относительно $\arg\lambda$, и для любого положительного x

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\tilde{f}(\lambda)e^{\lambda x}d\lambda = 0 \tag{7.2}$$

Из этой леммы следует [9].

Теорема разложения, утверждающая, что для любой (мероморфной и правильной в некоторой области $\mathrm{Re}\,\lambda > a$) функции, для которой выполняются условия леммы Жордана, и кроме того, для любого $c>a$ абсолютно сходится интеграл $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\tilde{f}(\lambda)d\lambda$ оригиналом служит функция

$$f(x) = \sum_k \operatorname*{res}_{\lambda_k}\tilde{f}(\lambda)e^{\lambda x}, \tag{7.3}$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам λ_k функции $\tilde{f}(\lambda)$ в порядке неубывания их модулей.

Вычет в простом полюсе λ_k функции $F(\lambda)$ равен

$$\operatorname*{res}_{\lambda_k} F(\lambda) = \left[(\lambda - \lambda_k) F(\lambda) \right]_{\lambda=\lambda_k} \tag{7.4}$$

В частности,

$$\operatorname*{res}_{\lambda_k} \frac{q(\lambda)}{p(\lambda)} = \frac{q(\lambda_k)}{p'(\lambda_k)}$$

если $p(\lambda_k) = 0 \quad и \quad p'(\lambda_k) \neq 0.$ (7.5)

Если же λ_k - полюс n-го порядка, то

$$\operatorname*{res}_{\lambda_k} F(\lambda) = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{n-1} \left[(\lambda - \lambda_k)^n F(\lambda) \right] \right\}_{\lambda=\lambda_k} \tag{7.6}$$

Из приближенных методов обращения часто используется

Метод перевала. Пусть интеграл (7.1) можно представить в виде

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} H(z) e^{\varphi(z)} dz, \tag{7.7}$$

где $H(z)$ и $f(z) = u(z) + iv(z)$ на вещественной оси вещественны и $u(z)$ имеет на этой оси минимум. В точке минимума $z = \tilde{z}$ производная функции $u(z)$ обращается в нуль:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{7.8}$$

Поскольку функции u и v – гармонические,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{7.9}$$

то при переходе через точку $\bar{z}$ параллельно мнимой оси функция $u(z)$ имеет максимум. Такая точка называется точкой перевала. По условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

т.е. производная от $v(z)$ в точке перевала тоже равна нулю. Так как $v(z)$ на вещественной оси равна нулю, то

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

т.е. в окрестности точки $\bar{z}$ функция $v(z)$ вдоль прямой, параллельной мнимой оси, практически постоянна и равна нулю.

Перенесем контур интегрирования (7.7) так, чтобы он проходил через точку $\overline{z}$ (оставаясь параллельно мнимой оси). Тогда в окрестности этой точки функция $e^{f(z)} = e^{u(z)}$ будет быстро возрастать, проходя через максимальное значение $e^{u(\overline{z})}$ в точке $\overline{z}$, а затем столь же быстро убывать. Если $H(z)$ достаточно медленно меняющаяся функция, ее изменением под интегралом можно пренебречь:

$$I \approx \frac{1}{2\pi i} H(z) \int_{\overline{x}-i\infty}^{x+i\infty} e^{u(z)} dz \qquad (7.10)$$

Разлагая $u(\overline{x}, y)$ в ряд по y:

$$u(\overline{x}, y) = u(\overline{x}, 0) + y \left.\frac{\partial u(\overline{x}, y)}{\partial y'}\right|_{y=0} + \frac{y^2}{2} \left.\frac{\partial^2 u(\overline{x}, y)}{\partial y^2}\right|_{y=0} + \ldots$$

и учитывая (7.8) – (7.9), получим

$$u(\overline{x}, y) = f(\tilde{z}) - \frac{y^2}{2} \left| f''(\overline{z}) \right| + \ldots$$

где $f(\overline{z}) = u(\overline{x}, 0)$ и $\left| f''(\overline{z}) \right| = \partial^2 u(\overline{x}, 0) / \partial x^2$. Учитывая, что $dz = idy$, где y меняется от $-\infty$ до ∞, представим (7.10) в виде

$$I \approx \frac{1}{2\pi} H(\overline{z}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}\left| f''(\overline{z}) \right|} dy$$

Наконец, после замены переменной $y^2 \left| f''(\overline{z}) \right| = t^2$, приводящей к интегралу Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

Получаем

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left| f''(\overline{z}) \right|}} H(\overline{z}) e^{f(\overline{z})} \qquad (7.11)$$

где точка $\overline{z}$ определяется условием перевала

$$f(\overline{z}) = 0 \qquad (7.12)$$

Изложение метода перевала в общем случае можно найти в работах [9,11,19] и др.

Иногда удается выполнить обратное преобразование другими способами, например, представить результат в виде определенного интеграла от вещественной функции, вычисление которого можно осуществить численными методами. В частности, если трансформанта распадается на произведение «обращаемых» трансформант, можно воспользоваться теоремой о свертке.

1.8. Интегральное представление ряда [6,22]

Если решение $f(x)$ некоторого уравнения получено в виде ряда, например,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-x)^n \qquad (8.1)$$

с областью сходимости $0 \le x \le a$, то может возникнуть проблема вычисления $f(x)$ вне этой области. Один из путей решения этой проблемы состоит в следующем. Ряд (8.1) можно рассматривать как результат вычисления комплексного интеграла от функции,, имеющей простые полюса в точках $z=-0,1,2,...$, методом вычетов, причем вычеты, согласно (9.1), соответственно равны

$$\frac{1}{2\pi i}a_0,\quad \frac{1}{2\pi i}a_1(-x),\quad \frac{1}{2\pi i}a_2(-x)^2,\quad ... \qquad (8.2)$$

Напомним, что гамма-функция Γ(z) имеет простые полюса в точках $z=-n(n=0,1,2,...)$ с вычетами, равными $(-I)^n/n!$, следовательно, функция Γ(-z) имеет полюса в точке z=n с вычетами $(-1)^{n+1}/n!$, а функция $-\frac{1}{2\pi i}\Gamma(z+1)\Gamma(-z)a(z)x^z$ имеет вычеты (8.2) в соответствующих точках. Проводя контур интегрирования между полюсами z=0 и z=-1 данной функции и замыкая его направо (по часовой стрелке!), получаем ряд

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\Gamma(-z)\Gamma(z+1)a(z)x^z=\sum_{m=0}^{\infty}a(n)(-x)^n \qquad (8.3)$$

совпадающий с (9.1), если $a(n)=a_n$. Поскольку интеграл по замыкающему контуру равен нулю, левую часть можно заменить интегралом по контуру, параллельному мнимой оси

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(z)\Gamma(z+1)a(z)x^z=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)(-x)^n \qquad (8.4)$$

Полученный интеграл служит аналитическим продолжением функции (8.1), заданной в форме ряда, вне круга его сходимости. Чтобы получить разложение $f(x)$ по степеням x^{-1}, замкнем контур интегрирования полукругом бесконечно большогорадиуса налево(против часовой стрелки). Тогда рассматриваемый интеграл будет равен сумме вычетов подынтегральной функции в точках z=-1;-2,… плюс интеграл по замкнутому контуру. Можно показать, что последний имеет порядок e^{-x} [6]; пренебрегая им, получим

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\Gamma(-z)\Gamma(z+1)a(z)x^z=-\sum_{m=0}^{\infty}a(-n)\left(-\frac{1}{x}\right)^n \tag{8.5}$$

1.9. Пример

Следующий прием часто используется в теории переноса. Пусть необходимо вычислить интеграл

$$I=\int_0^{\infty}J_0(kr)\left(\frac{k^2}{4}\right)^p kdk \tag{9.1}$$

Будем искать его как предел интегралов

$$I(a)=\int_0^{\infty}J_0(kr)\left(\frac{k^2}{4}\right)^p e^{-ak}kdk$$

при $a\to 0$. Разлагая функцию Бесселя в ряд, получим

$$I(a)=4^{-p}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\left(\frac{z}{2}\right)^2\right]^n\frac{\Gamma(2n+2p+2)}{(n!)^2a^{2n+2p+2}} \tag{9.2}$$

Согласно (8.5), ряд (9.2) можно представить в виде комплексного интеграла:

$$I(a)=\frac{1}{2\pi i}4^{-p}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{2z}\frac{\Gamma(-z)(2z+2p+2)}{\Gamma(z+1)a^{2z+2p+2}}dz\ ,-1<c<0.$$

Из всех вычетов подынтегральной функции только вычет в точке $z=-p-1$ не будет содержать а и не обратится в нуль при $a\to 0$, поэтому

$$\lim_{a\to 0}I(a)=\operatorname*{res}_{z=-p-1}\left[4^{-p}\left(\frac{z}{2}\right)^{2z}\frac{\Gamma(-z)(2z+2p+2)}{\Gamma(z+1)a^{2z+2p+2}}\right] \tag{9.3}$$

Вычисляя правую часть (9.3), окончательно получаем:

$$\int_0^{\infty}J_0(kr)\left(\frac{k^2}{4}\right)^p kdk=2r^{-2p-2}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(-p)} \tag{9.4}$$

1.10. Некоторые формулы и таблицы [3,17,20]

Гамма-функция:

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$$

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\Gamma(n+1)=n!$$

Дигамма-функция:

$$\psi(z)=\Gamma'(z)\Big/\Gamma(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$$

$$\psi(z) = \int_0^1 \frac{1 - t^{z-1}}{1 - t} dt - C,$$

$C = 0{,}577$ - постоянная Эйлера

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$$

Таблица 1.

z	$\Gamma(z)$	$\psi(z)$	z	$\Gamma(z)$	$\psi(z)$
1,0	1,000	-0,577	1,6	0,894	0,126
1,1	0,951	-0,424	1,7	0,909	0,208
1,2	0,918	-0,289	1,8	0,931	0,285
1,3	0,898	-0,169	1,9	0,962	0,356
1,4	0,887	-0,061	2,0	1,000	0,423
1,5	0,886	+0,036			

Бетта-функция:

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

Неполная гамма-функция:

$$\gamma(z, a) = \int_0^a e^{-t} t^{z-1} dt$$

Интегральная показательная функция:

$$E_n(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^{-n}} dt,$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

Таблица 2

z	$E_2(z) - z\ln z$	z	$E_2(z)$	z	$(z+2)e^z E_2(z)$
0,0	1,000	0,5	0,327	0,5	1,109
0,1	0,953	0,6	0,276	0,4	1,085
0,2	0,896	0,8	0,201	0,3	1,060
0,3	0,830	1,0	0,148	0,25	1,048
0,4	0,756	1,2	0,111	0,20	1,035
0,5	0,673	1,4	0,0839	0,15	1,-23
		1,6	0,0638	0,10	1,012
		1,8	0,0488		
		2,0	0,0375		

Полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Полный эллиптический интеграл второго рода:

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

Таблица 3

k^2	K	E	k^2	K	E
0,0	1,571	1,571	0,5	1,854	1,351
0,1	1,612	1,531	0,6	1,950	1,298
0,2	1,660	1,489	0,7	2,075	1,242
0,3	1,714	1,445	0,8	2,257	1,178
0,4	1,777	1,399	0,9	2,578	1,105
0,5	1,854	1,351	1,0	∞	1,000

Функция Бесселя

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{iz} \cos(n\varphi)\, d\varphi, n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-z^2/4\right)^k}{k!(n+k)!}$$

$$J_0'(z) = -J_1(z), \quad J_1'(z) = J_0(z) - \frac{1}{z} J_1(z)$$

Модифицированная функция Бесселя

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{x} e^{z\cos\varphi} \cos(n\varphi)\, d\varphi, n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$I_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(z^2/4\right)^k}{k!(n+k)!}$$

$$I_n(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left\{1 - \frac{4n^2 - 1}{8z} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!(8z)^2} - \ldots\right\}$$

$$z \to \infty, |\arg z| < \pi/2$$

$$I_{n+1}(z) = -\frac{2n}{z} I_n(z) + I_{n-1}(z)$$

Таблица 4

z	$e^{-z}I_0$	$e^{-z}I_1$	z	$e^{-z}I_0$	$e^{-z}I_1$	z	$e^{-z}I_0$	$e^{-z}I_1$
0,0	1,000	0,000	1,0	0,466	0,208	6	0,167	0,152
0,1	0,907	0,045	1,5	0,367	0,219	7	0,154	0,142
0,2	0,827	0,082	2,0	0,308	0,215	8	0,143	0,134
0,3	0,758	0,112	2,5	0,270	0,207	9	0,135	0,127
0,4	0,697	0,137	3,0	0,243	0,197	10	0,128	0,122
0,5	0,645	0,156	3,5	0,222	0,187	11	0,122	0,116
0,6	0,599	0,172	4,0	0,207	0,179	12	0,116	0,111
0,7	0,559	0,185	4,5	0,194	0,171	13	0,112	0,107
0,8	0,524	0,194	5,0	0,183	0,164	14	0,108	0,104
0,9	0,493	0,202	5,5	0,174	0,158	15	0,104	0,100

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z\,ch\,t} ch(\nu t)\,dt \quad \left(|\arg z| < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$K_\nu(z) \sim \frac{1}{2}\Gamma(\nu)(z/2)^{-\nu}, z \to 0 (\operatorname{Re}\nu > 0)$$

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{21(8z)^2} + \ldots\right\}$$

$$z \to \infty \quad \left(|\arg z| < \frac{3\pi}{2}\right)$$

Интегралы: $\int_0^\infty \ln t J_0(t)\,dt = -[\ln 2 + C]$

$$\int_0^\infty \ln t J_1(t)\,dt = -\left[\ln\frac{1}{2} + C\right]$$

$$\int_0^\infty t^\mu J_\nu(t)\,dt = \frac{2^\mu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}, \operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1$$

$$\operatorname{Re}\mu < 1/2$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{n+1} J_n(at)\,dt}{(t^2+z^2)^{\mu+1}} = \frac{a^\mu z^{n-\mu}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} K_{n-\mu}(az)$$

$$a > 0, \operatorname{Re} z > 0$$

$$0 \le n \le 2\operatorname{Re}\mu + \frac{3}{2}$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2t^2}t^{n+1}J_n(bt)\,dt=\frac{b^2}{(2a^2)^{n+1}}e^{-b^2/4a^2}$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{t}{k}\right)I_n\left(2\sqrt{kt}\right)dt=\frac{1}{s^{n+1}}e^{k/s},$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

Другие формулы: $\ln\frac{1}{1-x}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\;\left(x^2<1\right)$

$$arctgz=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$$

1.11. Обозначения и функции каскадной теории[1,14,15,22].

X- радиац.ед.длины $\beta=\varepsilon/X$, ε -критич. Энергия $\left\langle\theta^2\right\rangle=\left(E_s/E\right)^2/X$, $E_s=21 МэВ$

$$W_{e\to\gamma}(E\to E')\,dE'=\left[V_r(E'/E)\,dE'/E\right]/X$$

$$W_{\gamma\to e}(E\to E')\,dE'=\left[V_p(E'/E)\,dE'/E\right]/X$$

$$\hat{A}\Phi_e(E)=\int_0^1\left[\Phi_e(E)-\frac{1}{1-u}\Phi_e\left(\frac{E}{1-u}\right)\right]V_r(u)\,du$$

$$\hat{B}\Phi_\gamma(E)=2\int_0^1\Phi_\gamma\left(\frac{E}{u}\right)V_p(u)\frac{du}{u},\hat{C}\Phi_e(E)=\int_0^1\Phi_e\left(\frac{E}{u}\right)V_r(u)\frac{du}{u}$$

Таблица 5

s	A(s)	B(s)	C(s)	$\lambda_1(s)$	$\lambda_1'(s)$	$\lambda_1''(s)$
0,0	0,0000	1,546	∞	∞	-∞	∞
0,1	0,1520	1,400	12,842	+3,789	-25,005	-
0,2	0,2863	1,280	6,123	2,270	-9,488	+75
0,3	0,4067	1,180	3,923	1,569	-5,415	+26
0,4	0,5152	1,096	2,846	1,127	-3,654	12,5
0,5	0,6146	1,022	2,214	0,813	-2,693	7,6
0,	0,706	0,959	1,802	0,576	-2,093	4,95

6						
0,7	0,791	0,905	1,513	0,389	-1,685	3,50
0,8	0,870	0,855	1,3014	0,235	-1,389	2,55
0,9	0,943	0,812	1,1400	0,106	-1,1660	1,97
1,0	1,0135	0,7733	1,0135	0,000	-0,9908	1,5634
1,1	1,078	0,7383	0,9112	-0,092	-0,8501	1,275
1,2	1,142	0,7065	0,8276	-0,171	-0,7333	1,060
1,3	1,200	0,6778	0,7580	-0,239	-0,6362	0,893
1,4	1,257	0,6514	0,6988	-0,298	-0,5531	0,764
1,5	1,311	0,6272	0,6484	-0,350	-0,4825	0,655
1,6	1,363	0,6049	0,6047	-0,395	-0,4214	0,565
1,7	1,412	0,5842	0,5666	-0,435	-0,3691	0,487
1,8	1,460	0,5650	0,5329	-0,470	-0,3238	0,423
1,9	1,506	0,5473	0,5032	-0,500	-0,2841	0,370
2,0	1,550	0,5306	0,4767	-0,526	-0,2498	0,320
2,1	1,592	0,5148	0,4528	-0,550	-0,2202	0,277
2,2	1,634	0,5004	0,4313	-0,570	-0,1943	0,241
2,3	1,674	0,4866	0,4117	-0,589	-0,1719	0,210
2,4	1,713	0,4736	0,3940	-0,605	-0,1523	0,182
2,5	1,750	0,4614	0,3776	-0,619	-0,1354	0,159
2,6	1,787	0,4499	0,3627	-0,632	-0,1205	0,138
2,7	1,821	0,4389	0,3489	-0,643	-0,1077	0,120
2,8	1,857	0,4285	0,3362	-0,654	-0,0964	0,107
2,9	1,892	0,4186	0,3243	-0,663	-0,0863	0,093
∞	$1,36\ln s$	0	0	-0,773		

$$A(s)=\int_0^1\left[1-(1-u)^s\right]V_r(u)\,du$$

$$B(s)=\int_0^1 u^s V_p(u)\,du,\quad C(s)=\int_0^1 u^s V_r(u)\,du$$

$$\sigma_0=\int_0^1 V_p(u)\,du$$

$$\lambda_{1,2}(s)=\frac{1}{2}\left\{-A(s)-\sigma_0\pm\sqrt{\left(A(s)-\sigma_0\right)^2+4B(s)C(s)}\right\}$$

$$\psi(\lambda,s)=\left[\lambda-\lambda_1(s)\right]\left[\lambda-\lambda_2(s)\right]\Big/(\lambda+\sigma_0)$$

$$H_{e\to e}(s)=\frac{\sigma_0+\lambda_1(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)},\quad H_{\gamma\to\gamma}(s)=\frac{\sigma_0+\lambda_2(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}$$

$$H_{e\to\gamma}(s)=\frac{C(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)},\quad H_{\gamma\to e}(s)=\frac{B(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}$$

$$N(t,E_0/E)=\frac{H(s)}{\sqrt{2\pi s^n\lambda_1''(s)t}}\left(\frac{E_0}{E}\right)^S e^{\lambda_1(s)t},\quad \lambda_1'(s)t=-\ln\frac{E_0}{E}$$

$$n_{e\to e}=1,\ n_{\gamma\to\gamma}=1,\ n_{e\to\gamma}=3/2,\ n_{\gamma\to e}=1/2$$

2. ОПИСАНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ.

Тема 1. ПЕРЕНОС НЕЙТРОНОВ

Самостоятельная работа 1. Поток нейтронов в диффузионном приближении.

Цель работы:

вычислить плотность потока $\Phi(r)$ нейтронов от точечного и плоского источников в однородной бесконечной среду в диффузионном приближении.

Порядок выполнения.

1. Записать стационарное уравнение диффузии нейтронов в случае точечного источника.
2. Решить это уравнение.
3. Используя полученное решение , найти плотность потока в случае плоского источника.
4. Проверить, что полученный результат удовлетворяет уравнению диффузии в плоской геометрии.

Литература: [4,16].

Самостоятельная работа 2. Поток от точечного источника(односкоростное приближение).

Цель работы:

в односкоростном приближении с изотропным рассеянием найти плотность потока $\Phi(r)$ от точечного источника в однородной бесконечной среде.

Порядок выполнения.

1. Записать интегральное уравнение для $\Phi(r)$.
2. Применить интегральное преобразование.
3. Найдя трансформанту, провести обратное преобразование.
4. Обсудить результат.

Литература: [4,12].

Самостоятельная работа 3. Угловое распределение вблизи точечного источника.

Цель работы:

найти угловое распределение нейтронов на малом расстоянии от точечного изотропного источника, помещенного в однородную среду с изотропным рассеянием, в односкоростном приближении.

Порядок выполнения.

1. Записать интегральное односкоростное кинетическое уравнение и вытекающее из него разложение по порядкам рассеяния.
2. Вычислить распределение нерассеянных нейтронов.
3. Вычислить распределение однократно рассеянных нейтронов.
4. Рассмотреть двукратно рассеянные нейтроны.
5. Обсудить результат.

Литература: [8,13].

Самостоятельная работа 4. Равновесный спектр нейтронов.

Цель работы:

найти распределение нейтронов по летаргии в бесконечной однородной среде без поглощения с равномерно распределенным источником моноэнергетических нейтронов.

Порядок выполнения.

1. Записать уравнение для дифференциального (по летаргии) потока нейтронов $\Phi(r)$.
2. Применить интегральное преобразование.

3. Проанализировать трансформанту в правой полуплоскости. Выполнить обратное преобразование.
4. Обсудить результат.

Литература: [12].

Тема 2. ПЕРЕНОС ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ.

Самостоятельная работа 5. Распределение квантов по длинам волн.

Цель работы:

в приближении «прямо-вперед» найти распределение гамма-квантов по длинам волн $\lambda = mc^2/E$ на глубине z от плоского моноэнергетического источника, находящегося в плоскости z=0 и испускающего кванты длиной волны λ_0 вдоль оси z.

Порядок выполнения.

1. Записать уравнение для распределения $\Phi(z,\lambda)$ по длинам волн в указанном приближении.
2. Выполнить интегральное преобразование по глубине.
3. Используя приближение $\sum_s(\lambda \to \lambda') = C$, преобразовать интегральное уравнение для $\tilde{\Phi}(p,\lambda)$ в дифференциальное.
4. Не делая специальных предположений о виде функции $\Sigma(\lambda)$, найти решение дифференциального уравнения.
5. Предположив, что $\Sigma(\lambda) = \Sigma = const$, выполнить обратное преобразование.
6. Проанализировать результат.

Литература:[8,18].

Самостоятельная работа 6. Угловое распределение.

Цель работы:

в приближении малых углов найти угловое распределение гамма-квантов от плоского моноэнергетического мононаправленного источника.

Порядок выполнения.

1. Записать уравнение для $\Phi(z,v,\lambda)$ в указанном приближении, используя $\sum_s(\lambda \to \lambda')$ из предыдущей работы и учитывая закон Комптона.
2. Выполнить необходимые интегральные преобразования. Найти трансформанту $\tilde{\Phi}(p,q,\eta)$.
3. Выполнить обратное преобразование.

4. Проанализировать результат.

Литература: [10,18].

Самостоятельная работа 7. Поле рассеянного излучения в области тонкого луча.

Цель работы:

> найти радиальное распределение плотности потока(проинтегрированного по углам и энергиям) рассеянного излучения в области тонкого луча, образованного мононаправленным источником, равномерно распределенным в круге радиусом a и излучающим кванты энергии $\mathbf{E_0}$ нормально к поверхности распределения (среда однородна и бесконечна).

Порядок выполнения.

1. Записать интегральное сопряженное уравнение для искомой величины и выделить главную особенность решения в малых расстояниях от прямой, вдоль которой направлен вектор Ω (направление первичного фотона).
2. Полученный выше результат использовать для вычисления плотности потока в области луча конечного радиуса a .
3. Обсудить результат. Провести численные расчеты.

Литература: [6].

Тема 3. ПЕРЕНОС ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ.

Самостоятельная работа 8. Пространственно-угловое распределение без учета потерь энергии.

Цель работы:

> найти пространственно-угловое распределение заряженных частиц в случае точечного мононаправленного источника учитывая рассеяние в приближении Ландау и не учитывая потерь энергии.

Порядок выполнения.

1. Записать уравнение, используя для описания рассеяния приближении Ландау и пренебрегая потерями энергии(поглощения нет).
2. Выполнить интегральные преобразования по r и v .
3. Решить полученное дифференциальное уравнение.
4. Проанализировать результат.

Литература: [1,8].

Самостоятельная работа 9. Угловое распределение(теория Мольера).

Цель работы:

найти угловое распределение частиц без использования приближения Ландау для резерфордовского сечения с учетом экранирования.

Порядок выполнения.

1. Записать уравнение для углового распределения частиц в плоской геометрии от моноэнергетического источника без учета потерь энергии.
2. Выполнить преобразование Фурье-Бесселя по углам.
3. Решить полученное дифференциальное уравнение для трансформанты.
4. Интеграл в показателе экспоненты вычислить приближенно, разбив область интегрирования на две части, в одной из которых разложить функцию Бесселя в ряд, оставив первые два члена, в другой положить $\eta(\theta)=1$. Преобразовывая интегралы, выразить результат через решение трансцендентного уравнения $B-\ln B=b$
5. Подставить трансформанту в формулу обратного преобразования Фурье-Бесселя и представить результат в виде ряда по обратным степеням B.
6. Обсудить результат.

Литература: [7,8].

Самостоятельная работа 10. Пространственно-угловое распределение с учетом ионизационных потерь.

Цель работы:

найти энергетический спектр заряженных частиц, а также характеристики $\overline{v^2}$, $\overline{\rho v}$, $\overline{\rho^2}$ пространственно-углового распределения в приближении непрерывного замедления от точечного моноэнергетического мононаправленного источника.

Порядок выполнения.

1. Записать уравнение для $\Phi(z,\rho,v,E)$ в приближении непрерывного замедления по E и в приближении Ландау по v .
2. Проинтегрировав полученное уравнение по ρ и v, найти уравнение для $\Phi(z,E)$, решить его при произвольном $\beta(E)$ и проанализировать результат.
3. Получить уравнение для $\overline{v^2}$ и решить его в приближении $\beta(E)=const$.
4. В том же приближении найти $\overline{\rho v}$ и $\overline{\rho^2}$.
5. Проанализировать результат.

Литература: [1].

Самостоятельная работа 11. Распределение ионизационных потерь.

Цель работы:

найти распределение ионизационных потерь энергии тяжелых и легких заряженных частиц в тонком слое вещества.

Порядок выполнения.

1. Записать уравнение для распределения $\Phi(z,\Delta)$ потерь энергии $\Delta = E_0 - E$ на ионизацию в приближении «прямо-вперед».
2. Упростить уравнение для случая тяжелых частиц в тонком слое вещества (приближение Ландау).
3. Решить полученное уравнение. Проанализировать результат.
4. Для легких частиц преобразовать по Лапласу интегро-дифференциальное уравнение.
5. Найти приближенное решение этого уравнения, используя явное выражение для сечения
   $\Sigma_s(Q) = a/Q^2, Q > Q_1$
   И разбив интеграл в показателе экспоненты на два с областями интегрирования $(0,Q_1)$ и (Q_1,∞).
6. Проанализировать результат.
   Литература: [7,8].

Самостоятельная работа 12. Распределение радиационных потерь.

Цель работы:

найти функцию распределения электронов, прошедших тонкий слой вещества t, по энергиям в предположении, что основную роль играют радиационные столкновения(остальными процессами можно пренебречь).

Порядок выполнения.

1. В приближении «прямо-вперед» записать уравнение для энергетического спектра частиц.
2. Предполагая сечение тормозного излучения $W_{e\to\gamma}(E\to E')dE'$ функцией отношения E'/E (см.п.1.11), выполнить интегральное преобразование по энергии. Решить полученное уравнение.
3. Взяв сечение в виде $V_r(u) = \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{\left|\ln(1-u)\right|}$, найти искомое распределение.
4. Обсудить результат.

Литература: [14].

Самостоятельная работа 13. Каскадные кривые в приближении А.

Цель работы:

в приближении А (учитывая только тормозное излучение и образование электронно-позитронных пар) найти зависимость числа электронов $N_e(t,E)$

с энергией выше E от глубины t в каскаде, образованном электроном с энергией E_0.

Порядок выполнения.

1. Записать систему уравнений для электрических спектров электронов и фотонов, включив источник в правую часть уравнений.
2. Исключив Φ_γ, привести систему к одному дифференциальному уравнению.
3. Применив интегральные преобразования по энергии и глубине, найти трансформанты $\tilde{\Phi}_e(\lambda,s)$ и $\tilde{\Phi}_e(t,s)$.
4. Найти выражения для $A(s)$, $B(s)$ и $C(s)$ в случае простейших сечений. Составить таблицы этих функций, а также функций $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$, $H_{e\to e}$ $H_{\gamma\to\gamma}$ для s в интервале от 0 до 2 с шагом 0,2.
5. Обратное преобразование от s к E выполнить методом перевала.
6. Вычислить и построить каскадные кривые для $E_0/E = 10^2, 10^4, 10^6$ в интервале глубин, соответствующих изменению возраста от 0 до 2.

Литература: [15,22].

Самостоятельная работа 14. Равновесный спектр электронов (формула Беленького-Тамма).

Цель работы:

в приближении Б каскадной теории найти равновесный интегральный спектр электронов каскада, образованного первичным электроном с энергией E_0.

Порядок выполнения.

1. Записать соответствующую систему уравнений, преобразовать её по Меллину и исключить фотонную трансформанту.
2. Проанализировать коэффициент $f(s)$ перед электронной трансформантой $\tilde{\Phi}_e(s)$ и найти простейшую аппроксимацию для него.
3. Используя эту аппроксимацию, решить полученное разностное уравнение для трансформанты.
4. Выразить интегральный спектр через трансформанту $\tilde{\Phi}_e(s)$ и использовать для его вычисления свойства гамма-функций и метод вычетов.
5. Проанализировать результат. Вычислить нормированную на I функцию распределения и построить график в интервале ξ от 0 до 10. ($\xi = qE/\varepsilon$, см.указания).

Литература: [1].

Самостоятельная работа 15. Угловое распределение электронов(приближение А)

Цель работы:

найти угловое распределение электронов с энергией выше E на глубине t ливня, образованного первичным электроном(в приближении А).

Порядок выполнения:

1. Записать систему уравнений и выполнить интегральные преобразования по углам и энергиям.
2. Исключить $\tilde{\Phi}_{\gamma}$.
3. Представить решение в виде ряда по степеням: q^2 и найти уравнения для коэффициентов.
4. Решить уравнения для коэффициентов. Записать выражение для $\tilde{\Phi}_e(t,q,s)$, используя аппроксимацию $\psi(\lambda,s)=q(\lambda)\left[s-s_1(\lambda)\right]/s$.
5. Выполнить обратное преобразование и найти угловое распределение электронов с энергией выше E.
6. Обсудить результат.

Литература: [1,6].

Самостоятельная работа 16. Пространственное распределение электронов (приближение Б).

Цель работы:

найти функцию распределения электронов по расстояниям от оси ливня в приближении Б.

Порядок выполнения.

1. Представить трансформанту $\tilde{\Phi}_e(t,k,E)=2\pi\int_0^\infty \Phi_e(t,\rho,E)\,J_0(k\rho)\,\rho d\rho$ в виде двойного ряда (по $-k^2E_s^2/4E^2$ и $-\varepsilon/E$).
2. Выполнить интегральное преобразование по энергии и представить ряд в интегральной форме.
3. Выполнить обратное преобразование.
4. Записать выражение для радиального распределения полного числа частиц(E>0).
5. Записать выражения для полного числа частиц, среднеквадратичного радиуса и нормированного распределения.
6. Представить нормированную функцию радиального распределения в зависимости от $\rho/\sqrt{\overline{\rho^2}}$.

Литература: [6,22,23].

Тема 5. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ.

Самостоятельная работа 17. Флуктуации числа столкновений нейтрона.

Цель работы:

найти относительные флуктуации числа столкновений нейтрона с начальной энергией E в бесконечной однородной среде до момента, когда его энергия станет меньше порогового значения E_1($E \gg E_1$).

Порядок выполнения.

1. Записать сопряженные уравнения для первых двух моментов числа столкновений.
2. Применить интегральное преобразование. Найти трансформанты.
3. Найти асимптотику первого момента при $E/E \to \infty$.
4. Найти асимптотику второго момента.
5. Вычислить относительные флуктуации при $E/E \to \infty$. Проанализировать результат.

Литература: [21].

Самостоятельная работа 18. Флуктуации числа электронов в электронно-фотонном каскаде.

Цель работы:

найти приближенную оценку относительных флуктуаций числа электронов с энергией выше E_1 на глубине t в приближении A каскадной теории.

Порядок выполнения.

1. Записать систему уравнений для вторых моментов.
2. Найти приближенное решение системы.
3. Провести численный расчет относительных флуктуаций числа электронов в ливне, образованном первичным электроном, и в ливне от первичного фотона для s от 0,2 до 1,4. Результат изобразить на графике. Обсудить.

Литература: [2].

3. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХРАБОТ.

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 1.

1. Если начало координат совместить с источником, а мощность источника считать единичной, то правая часть диффузионного уравнения примет вид $\sigma(\vec{r})$.
2. Воспользоваться трехмерным преобразованием Фурье: подставить (3.6) в уравнение, выполнить дифференцирование по $\vec{r}$, затем умножить обе части уравнения на $e^{i\vec{k}'\vec{r}}$ и, проинтегрировав по $\vec{k}'$, воспользоваться интегральным представлением δ – функции. При обратном преобразовании полярную ось направить вдоль $\vec{r}$. Интегрирование по k осуществить методом вычетов (изобразить полюса и контур интегрирования).
3. Плоский источник равномерно распределен в плоскости xy с поверхностной плотностью S_0. Интегрирование по плоскости следует вести в полярной системе координат с учетом азимутальной симметрии:

$$ds = 2\pi\rho d\rho = \pi d\rho^2 = \pi dr^2 \quad r^2 = p^2 + z^2$$

,

4. Особое внимание обратить на точку $z = 0$. Использовать функцию

$$signz = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ -1, & z < 0 \end{cases}$$

обладающую свойством

$$sign'z = 2\delta(z)$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 2.

1. Использовать принятые в теории переноса нейронов обозначения:

$$l = \frac{1}{\Sigma}, \quad c = \frac{\Sigma_S}{\Sigma} < 1$$

2. Умножить обе части уравнения на $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ и проинтегрировать по $\vec{r}$ (Преобразование Фурье). В интегральном члене изменить порядок интегрирования и сделать замену $R = r - r'$. Вначале выполнить интегрирование по радиальной переменной, затем по угловой.
3. При обращении сначала выполнить интегрирование по углам, затем учесть, что трансформанта имеет следующие особенности:
   a) Полюса для двух корней уравнения $1 - \left(\frac{c}{kl}\right) arctgkl = 0,$ т.е. в точках $k = \pm\frac{i}{L}$, где L определяется уравнением $\frac{1}{c} = \frac{L}{2l} \ln\frac{L + l}{L - l},$
   b) Разрезы вдоль мнимой оси от $k = \frac{i}{l}$ до $k = i\infty$ и от $k = -\frac{i}{l}$ до $k = -i\infty$ со значениями $arctgkl$ на обоих берегах разреза, отличающимися на π:

$$arctg(is) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{i}{2}\ln\dfrac{s-1}{s+1} & \textit{на левом берегу}, \\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{i}{2}\ln\dfrac{s-1}{s+1} & \textit{на правом берегу}. \end{cases}$$

Сообразно с этими особенностями выбрать путь интегрирования. Представить решение в виде определенного интеграла от вещественной функции вещественной переменной.

4. Проанализировать поведение потока на малых и больших расстояниях от источника. Показать, что в условиях изотропного рассеяния и слабого поглощения L совпадает с линией диффузии.

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 3.

1. Если начало координат выбрать в точке нахождения источника, то плотность потока будет зависеть лишь от расстояния до источника r или угла ψ между радиус-вектором $\vec{r}$ и вектором направления Ω .
2. Чтобы правильно записать плотность точечного изотропного источника, входящую в выражение для нерассеянного потока в виде $S\left(r - \xi\Omega, \Omega\right)$, разобьем её на два сомножителя, описывающих угловое и пространственное распределение:

$$S\left(\vec{r}, \vec{\Omega}\right) = \frac{1}{4\pi}\delta\left(\vec{r}\right)$$

Тогда

$$S\left(\vec{r} - \xi\vec{\Omega}, \vec{\Omega}\right) = \frac{1}{4\pi}\delta\left(\vec{r} - \xi\vec{\Omega}\right)$$

Векторы r и $\xi\Omega$ равны, если равны их абсолютные величины r и ξ и совпадают направления $\frac{r}{r}$ и Ω (т.е. $\cos\psi = 1$). Поэтому

$$\delta\left(r - \xi\Omega\right) = C\delta\left(r - \xi\right)\delta\left(\cos\psi - 1\right)$$

Где C определяется из условия нормировки

$$\iiint\delta\left(r - \xi\Omega\right)r^2 dr d\cos\psi d\varphi = 1$$

В результате

$$S\left(\vec{r} - \xi\vec{\Omega}, \vec{\Omega}\right) = \frac{\delta\left(r - \xi\right)}{4\pi r^2}\frac{\delta\left(\cos\psi - 1\right)}{2\pi}$$

После вычисления Φ_0 обсудить результат.

3. При вычислении потока однократно рассеянных частиц верхний предел интегрирования по лучу заменить конечной величиной ξ_0. Перейти от переменной интегрирования ξ (рассеяние от точки наблюдения до точки рассеяния) к новой переменной ψ' (угол рассеяния). Использовать теорему синусов.
   Учитывая малость r, подынтегральную экспоненту разложить в ряд (ограничившись двумя первыми членами). После интегрирования и выделения главных (в асимптотическом смысле) членов, устремить $\xi_0 \to \infty$.
4. При оценке потока двухкратно рассеянных частиц использовать асимптотику однократно рассеянного потока (при $r \to 0$).
5. Сравнить интенсивности различных компонент. Сравнить с диффузионным приближением.

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 6.

1. Дифференциальное (по летаргии) сечение рассеяния имеет вид

$$\sum_S(u-u')=\sum_S(u)\,f(u-u')=\begin{cases}\dfrac{\Sigma_S}{1-\alpha}e^{-(u-u')}, & 0<u'-u<\Delta\\ 0, & \begin{array}{l}u'-u<0,\\ u'-u>\Delta\end{array}\end{cases}$$

где $\alpha=\left[\dfrac{M-1}{M+1}\right]^2$, М – отношение массы ядра к массе нейтрона, $\Delta=\ln\left(\dfrac{1}{\alpha}\right), u=\ln\left(\dfrac{E_0}{E}\right)$.

2. Параметр преобразования Лапласса по летаргии обозначить через λ.
3. Трансцендентное уравнение

$$(1-\alpha)(1+\lambda)=1-\alpha^{1+\lambda}$$

Имеет только один корень с неотрицательной вещественной частью. Остальные корни лежат слева от мнимой оси. При анализе асимптотики можно ограничиться только одним – главные – полюсом. Ввести обозначение $\xi=1-\dfrac{\alpha\Delta}{1-\alpha}$.

Указать физический смысл этой величины.

4. Рассмотреть зависимость $\Phi(u)$, перейти к $\Phi(E)$ при $E\to 0$ (привести физические соображения).

КСАМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 5.

1. Источник удобно задать в виде граничного условия.
2. Поскольку длину волны принято обозначать λ, параметр преобразования следует обозначить другой буквой (например, ρ).
3. Удобно перейти к новой функции $F(\rho,\lambda)=\left[\Sigma(\lambda)+\rho\right]\Phi(\rho,\lambda)$ и продифференцировать обе части интегрального уравнения.
4. Можно использовать, например, метод вариации произвольной постоянной. Отметим, что при $\lambda\neq\lambda_0$ полученный результат описывает только рассеянную компоненту.
5. Сначала применить метод перевала. Затем найти точное решение.
6. Проанализировать поведение точного решения на малых и больших глубинах. Сравнить с результатом метода перевала. Дать физическое объяснение полученному результату. Разложить функцию Бесселя в ряд и указать физический смысл отдельного члена. Можно ли получить точный результат, не решая кинетического уравнения?

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 6.

1. Показать, что закон комптона в приближении малых углов приводит к появлению множителя $\frac{\delta\left(\theta - \sqrt{2(\lambda' - \lambda)}\right)}{2\pi\theta}$ в дифференциальном сечении рассеяния.
2. Обозначения: ρ – параметр преобразования Лапласа по глубине, η - параметр преобразования Лапласа по $\lambda - \lambda_0$, q – параметр преобразования Фурье – Бесселя по углу.
3. При вычислении нуля функции $\Sigma + \rho - \frac{Ce^{-\frac{q^2}{2\eta}}}{\eta}$ воспользоваться методом последовательных приближений:

$$\eta^{(1)} = \frac{C}{\Sigma + \rho} e^{-\frac{q^2}{2C}(\Sigma + \rho)} \approx \frac{C}{\Sigma + \rho} - \frac{q^2}{2} \quad \text{при} \quad \frac{C}{\Sigma + \rho} \gg q^2$$

Слагаемое $-\frac{q^2}{2}$ можно оставить только в показателе экспоненты.

4. Каков смысл величины $2(\lambda - \lambda_0)$ в показателе экспоненты? Проведите необходимые вычисления. Можно ли было предвидеть результат? Поясните.

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 7.

1. Удобно использовать сферическую систему координат с началом в точке наблюдения. Вследствие очевидной симметрии решение уравнения будет зависеть(помимо энергии) от расстояния *r* до точки наблюдения и угла *ψ* между направлением движения частицы и направлением на точку наблюдения. Остальные выкладки здесь аналогичны проведенным в работе 3 (напомним только, что в данном случае присутствует энергетическая переменная и не сделано никаких предположений относительно сечения рассеяния $\Sigma_s(\cos\theta, E \to E')$).
2. Перейти в цилиндрическую систему координат (*z*, *ρ*, *φ*) и выполнить интегрирование по области занятой источником. При интегрировании по *ρ* выделить в подкоренном выражении знаменателя полный квадрат и произвести замену $x = \rho' - r\cos\varphi$. Очевидно, что интегрирование по φ достаточно выполнить в пределах $(0, \pi)$, для чего следует перейти к переменной $\varphi' = \frac{\pi - \varphi}{2}$ и, проинтегрировав по частям член с логарифмом, выразить результат через полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

3. Сравнить потоки рассеянных и нерассеянных квантов на оси пучка. Проанализировать радиальное распределение на малых $(\rho \ll a)$ и больших $(\rho \gg a)$ расстояниях. Провести численные расчеты и представить результаты на графике для ρ от 0 до 3*a*.

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 8.

1. В малоугловом приближении удобно перейти к «поперечным» переменным: $r \to (\rho, z), \quad \Omega \to (v, I)$. В приближении Ландау

$$\Sigma_s \Phi - \int \Sigma_s (\vec{v} - \vec{v}') \Phi(\vec{v}') d\vec{v}' = -\frac{\langle \theta^2 \rangle}{4} \nabla_\theta^2 \Phi$$

2. По обеим векторным переменным – преобразование Фурье (выразить Φ через $\tilde{\Phi}$, подставить в уравнение, изменить порядок операций, умножить на $\exp\left\{ i\left(k\vec{\rho} + \vec{q}\vec{v}\right)\right\}$ и проинтегрировав по $\rho, \quad v$, воспользоваться интегральным представлением δ-функции).
3. Удобно перейти в новым переменным $u = z, \quad v = zk + q$. При этом уравнение в частных производных превращается в обыкновенное однородное первого порядка с переменным коэффициентом, которое легко решается.
4. Найти частные распределения $\Phi(z, \rho) \quad u \quad \Phi(r, v)$. Вычислить средние квадраты этих распределений. Почему $\rho \sim z^3$, а не z, как v^2 ? Проверить нормировку.

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 9.

1. Резерфордовское сечение с учетом экранирования имеет вид

   $\Sigma_S(\theta) = \dfrac{K}{\theta^4}\eta(\theta); \quad \eta(\theta) \to 1, \quad \theta \to \infty$

4. Трансформанта имеет вид

$\tilde{\Phi}(z, q) = e^{-rA(q)}$

$zA(q) = 2\chi_c^2 I(q),$

Где

$$I(q) = \int_0^\infty \left[1 - J_0(q\theta)\right] \frac{\eta(\theta)}{\theta^3} d\theta, \quad \chi_c^2 = z\pi k.$$

Интеграл I представим в виде суммы:

$$I(q) = \int_0^{\chi}\ldots + \int_{\chi}^{\infty}\ldots \approx \frac{q^2}{4}\int_0^{\chi}\frac{\eta(\theta)}{\theta}d\theta + \int_{\chi}^{\infty}\left[1 - J_0(q\theta)\right]\frac{d\theta}{\theta^3}$$

Первый интеграл преобразуем интегрированием по частям, учитывая, что $\eta(\theta)\ln(\theta)\big|_{\theta=0} = 0$, а $\eta(\chi) \approx 1$. Введя обозначение

$$\chi_a = 2e^{\int_0^{\chi}\eta'(\theta)\ln\theta d\theta}$$

Получим $I_1 = \frac{q^2}{4}\left(\ln\chi - \ln\chi_a - \frac{1}{2}\right)$

Второй интеграл после замены переменной $x = q\theta$ и интегрирования по частям приводится к виду, содержащему интеграл

$$\int_{q\chi}^{\infty}\left[\frac{J_0'(x)}{x^2}\right]dx$$

Используя известные соотношения для функций Бесселя и интегрируя по частям, приходим к интегралу $\int_{q\chi}^{\infty}\left[\frac{J_0(x)}{x}\right]dx$.

Еще одно интегрирование по частям дает (везде считаем $q\chi \ll 1$)

$$\int_{q\chi}^{\infty}\ln xJ_1(x)\,dx \approx \int_0^{\infty}\ln xJ_1(x)\,dx$$

Введяобозначение $b = \ln\left(\frac{\chi_c}{\chi_a}\right)^2 + 1 - 2C$, получим:

$$zA(q) = \frac{u^2}{4} - \left(\frac{u^2}{4B}\right)\ln\left(\frac{u^2}{4}\right), u = \chi_c q\sqrt{B}$$
.

6. Вычислить и проанализировать член с *n=0*. Как зависит распределение Мольера от глубины, атомного номера вещества, от вида функции $\eta(\theta)$?

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 10.

2. Уравнение для $\Phi(z,E)$ можно упростить подстановкой

   $$\Phi(z,E) = \frac{1}{\beta(E)}e^{-\int_E^{E_0}\frac{dE'}{\beta(E')}}f(z,E)$$

   И заменой переменной

$$\varsigma = \int\limits_{E}^{E_0} \frac{dE'}{\beta(E')}$$

При преобразовании начального условия воспользоваться известным свойством δ-функции:

$$\delta(E(\varsigma) - E_0) = \frac{\delta(\varsigma - \varsigma_0)}{\left|\frac{dE}{d\varsigma}\right|}$$

Где ς_0 - корень уравнения $E(\varsigma) = E_0$. Легко видеть, что решение $f(x,\varsigma)$ зависит только от разности аргументов $\varsigma - x$.

3. Выразить β и $\langle \theta^2 \rangle$ через кинетическую энергию ξ и E_s (см. 1.11). Перейти от z и ς к новым переменным $t = \frac{z}{X}$ и $\tau = \frac{\varsigma}{X}$. При вычислении интеграла $\int \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\rho}} d\vec{\rho}$ учесть, что $\Phi(\rho) \to 0$ при $|\rho| \to \infty$. Далее,

$$\int v^2 \nabla_v^2 \Phi dv = \int \Phi \nabla_v^2 v^2 dv$$

Для решения полученного уравнения в частных производных первого порядка необходимо найти его характеристики

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dE}{-\varepsilon}$$

Вдоль которых оно превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\overline{v^2}}{d\tau} = \frac{E_s^2}{E^2(\tau)}$$

Последнее легко решается.

4. Отметим, что $\iint (\vec{v}\vec{\rho})\, \vec{v} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\rho}} d\vec{\rho} d\vec{v} = -\iint \vec{v} \Phi \frac{\partial}{\partial \vec{\rho}} (\vec{v}\vec{\rho})\, d\vec{\rho} d\vec{v} = -\iint v^2 \Phi(\vec{\rho}, \vec{v})\, d\vec{\rho} d\vec{v}$ и $\nabla_\theta^2 (v\rho) = 0$.

5. Сравнить в результатами работы 6.

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 11.

2. Для тяжелых частиц максимальные потери энергии в одном столкновении $\Delta_{\max} \ll E$, поэтому разложением подынтегральной функции в ряд интегро-дифференциальное уравнение можно преобразовать в дифференциальное второго порядка. В тонком слое вещества моменты $\int Q^n \sum_Q (E,Q)\, dQ$ можно считать не зависящими от E.

3. Применить преобразование Лапласа по Δ, решить дифференциальное по z уравнение для трансформанты $\tilde{\Phi}(z,\rho)$, а при обратном преобразовании

воспользоваться заменой переменной $\rho = ix^2$.
Найти величину относительных флуктуаций.

5. В первом интеграле разложить экспоненту в ряд и выразить результат через $\beta(Q < Q_1) = a \ln\left(\frac{Q_1}{Q'}\right)$. Где Q' - некоторая константа [8]. Во втором сделать замену переменных $\rho Q = x$, дважды проинтегрировать по частям, разложить в ряд по Q_1 и оставить члены, не обращающиеся в нуль при $Q_1 \to 0$.
преобразовать выражение к окончательному виду («распределение Ландау»).
6. Что можно сказать о ширине распределения? Дать статистическую интерпретацию полученным результатам.

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 12.

1. При записи граничного условия учесть, что начальный электрон в точке t=0 имеет фиксированную энергию E_0.
2. Использовать принятое в электромагнитной каскадной теории обозначение
$$A(s) = \int_0^1 \left[1 - (1-u)^s\right] V_r(u)\,du$$
3. Сначала необходимо вычислить $A(s)$. Удобно перейти под интегралом к новой переменной τ: $1-u = e^{-\tau}$. Возникшее при этом выражение $1-e^{-\tau s}$ разложить в ряд , выполнить интегрирование и воспользоваться разложением логарифма.
При обратном преобразовании воспользоваться методом вычетов, положив сначала $\frac{t}{\ln 2}$ целым числом, а затем взяв аналитическое продолжение полученной функции.
4. Вычислить моменты распределения, записать средние потери на пути t и относительные флуктуации.

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 13.

1. Систему координат выбрать так, чтобы начало совпадало с точкой рождения первичного электрона, а ось t – с направлением его движения. Использовать обозначения, приведенные в п.1.11.
2. Подействовав на уравнение для Φ_γ оператором $\hat{B}$, выразить $\hat{B}\Phi_\gamma$ через Φ_e с помощью другого уравнения.
3. По энергии – преобразование Меллина. Показать, что $\int_0^\infty E^s \hat{A}\Phi_e(E)\,dE = A(s)\,\tilde{\Phi}_e(s)$ и т.д., где $A(s), B(s), C(s)$

- Стандартные обозначения каскадной теории. По глубине – преобразование Лапласа. Преобразование членов, содержащих производные, провести интегрирование по частям (необходимо учесть, что при включенном в правую часть источнике $\Phi_e(t,E)$ и $\frac{\partial\Phi_e(t,E)}{\partial t}$ равны нулю при $t \le 0$). Разлагая в выражении для $\Phi_e(\lambda,s)$ знаменатель на множители и используя стандартные обозначения (см. 1.11), найти обратное преобразование Лапласа методом вычетов.

4. Использовать сечение в виде $V_R(u) = \frac{1}{u}, V_p(u) = \sigma_0 = \frac{7}{9}$.
5. Ограничиться только членов, содержащем экспоненту с большим показателем. Сначала перейти от $\Phi_e(t,E)$ к $N_e(t,E)$, а затем применить метод перевала ($\frac{\mathrm{H}(s)}{s}$ считать медленно меняющейся функцией).
6. Практический расчет по найденной формуле проводится следующим образом: выбирается последовательность значений каскадного параметра (возраста) $s_1, s_2, \ldots$, по ним находятся соответствующие глубины $t_1 t_2, \ldots$ (при заданном отношении $\frac{E_0}{E}$), полученные значения s и t подставляются в формулу $N_e(t,E)$. При этом значения $N_e(t,E)$ оказываются вычисленными в неравноотстоящих точках, по которым проводится плавная кривая, называемая каскадной кривой.

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 14.

1. Член с производной по энергии преобразуется интегрированием по частям.
2. Выразить коэффициент через λ_1 и λ_2. Обратить внимание на его поведение вблизи 0 и вблизи 1. Обосновать аппроксимацию

$$t(s) = \frac{q(s-1)}{s}, q = const(=2,29)$$

3. Подставив эту формулу в уравнение и заменив в нем s на s+1, ищите решение в виде

   $$\Phi_e(s) = \psi(s)\psi_0(s)$$

   Где $\psi_0(s)$ - решение соответствующего однородного уравнения. Подставляя это произведение в уравнение, можно получить

   $$\Psi(s+1) - \Psi(s) = -\frac{E_0^{s+1}}{(s+1)\varepsilon\psi_0(s)}$$

   Увеличивая в этом равенстве аргумент на 1,2 и т.д. и суммируя получающиеся при этом выражения, должны получить следущее:

$$\Phi_e(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{E_0^{s+k+1}\psi_0(s)}{(s+k+1)\,\varepsilon\psi_0(s+k)} - \Phi_e(s+n+1)\frac{\psi_0(s)}{\psi_0(s+n+1)}$$

Отношения $\frac{\psi_0(s)}{\psi_0(s+k)}$ и $\frac{\psi_0(s)}{\psi_0(s+n+1)}$ можно вычислить, используя однородное уравнение при разных значениях s (s, s+1, s+2,…).Результат выразить через гамма-функцию. При n$\to\infty$ второй член в записанном выше уравнении исчезает (почему?) и получается представление трансформанты в виде ряда по степеням ($-\frac{qE_0}{\varepsilon}$).

4. Воспользовавшись интегральным представлением бета-функции, представить отношение гамма-функций в виде интеграла, изменить порядок интегрирования, установить зависимость контура интегрирования по комплексной переменной от значения переменой во внешнем интеграле. Применить метод вычетов, просуммировать ряд, произвести замену переменных $\xi = \frac{qE}{\varepsilon}, \xi_0 = \frac{qE_0}{\varepsilon}$
5. Рассмотреть формулу в случаях E=E_0 и E=0, пояснить результат. Найти предел нормированного на I распределения при $E_0\to\infty$, выразить его через интегральную показательную функцию. Найти значение $E_{1/2}$, ниже(выше) которого находится половина частиц, для воздуха и свинца. Найти долю частиц с энергией выше критической.

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 15.

1. Рассеяние учесть в приближении Ландау.
2. См. работу 13.
3. Удобно использовать следующее разложение: $$\tilde{\Phi}_e(t,q,e) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{q^2E_s^2}{4E^2}\right]^n \varphi_n(t,E)$$

   Отсюда следует соответствующий ряд для $\tilde{\Phi}_e(t,q,s)$. Чтобы найти уравнения для коэффициентов, необходимо подставить этот ряд в уравнение для $\tilde{\Phi}_e(t,q,s)$ и приравнять к нулю коэффициенты при одинаковых степенях q^2. Удобно снова выделить множители $\left[-\frac{q^2E_s^2}{4E^2}\right]^n$, воспользовавшись свойствами преобразований Меллина.
4. Применить преобразование Лапласа по глубине. Выразить $\varphi_n(\lambda,s)$ через функцию $\psi(\lambda,s)$. При обратном преобразовании Лапласа пренебречь членами, пропорциональными $e^{\lambda_1(s+2)t}, e^{\lambda_1(s+4)t},\ldots,e^{\lambda_2(s)t}\cdots$.Подставить найденные $\varphi_n(t,s)$ в разложении для $\tilde{\Phi}_e(t,q,s)$, воспользоваться формулой обратного преобразования Меллина, перейти к трансформанте Фурье – Бесселя для числа электронов с

энергией выше E. Применив предложенную аппроксимацию и сравнив результат с разложением функции $(I+x)^{-\frac{s}{2}}$, свернуть ряд.

5. Обратное преобразование Фурье-Бесселя выполняется точно. Обращение Меллина производится методом перевала (зависимостью точки перевала от угла пренебречь).
6. Проанализировать распредtление на малых и больших углах. Записать распредление и вычислить среднеквадратичный угол для максимума ливня. Провести необходимые вычисления и представить распределение в максимуме на графике (в качестве аргумента взять $\varsigma = \frac{Ev}{P}, P = \frac{E_s}{2\sqrt{q(\lambda_1)}}$).

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 16.

1. Ряд имеет вид $\tilde{\Phi}_e(t,k,E) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{k^2E_s^2}{4E^2}\right)^m\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n\varphi_{mn}(t,E)$
2. Использовать обозначение: $m(t,s,m,n) = \Gamma(m+1)\Gamma(n+1)\varphi_{mn}(t,E), m\to p, n\to q$
3. В интеграле по s сделать замену переменных $s-2p-q=s'$
4. Проинтегрировать по E от E_1 до ∞ и, устремив $E_1\to 0$, вычислить предел с помощью вычетов (см. 1.9).
5. При вычислении моментов интегрирования следует производить по ρ от ρ_1 до ∞, устремляя затем $\rho_1\to 0$ и используя метод вычетов (1.9). Интегрирование по s произвести методом перевала, положив

   $$m(t,s,p,q) \approx m_0(s,p,q)e^{\lambda_1(s)t}$$

   И выразив результат через функцию $m_0(s,p,q)$.

6. Представить нормированную функцию радиального распределения в виде

   $$f(\rho,s) = \frac{1}{2\pi^2 i}\int dp\rho^{-2p-2}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(s)}\mu(s,p)$$

Где $\mu(s,p) = \frac{m_0(s,p,-s-2p)}{m_0(s,0,-s)}$

S – точка перевала(«возраст» ливня). Воспользоваться аппроксимацией $\mu(s,p) = b_{(s)}^{2p}$

Установить смысл коэффициента b. Записанный выше интеграл можно рассматривать как обратное преобразование Меллина от произведения трансформант $\Gamma(p+I)\cdot\Gamma(s+2p)$. Соответствующие оригиналы легко находятся(например, методом вычетов). Затем можно использовать теорему о свертке.

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 17.

1. Воспользоваться обозначениями и сечениями работы 4.
2. Преобразование Лапласа по летаргии.
3. При вычислении асимптотики ограничиться вычетов в главном полюсе, определяющим поведение $\bar{N}(u)$ при u→∞. При переходе к пределу воспользоваться правилом Лопиталя. Ввести обозначение: $\eta = 2 - \frac{\alpha\Delta^2}{1 - \alpha(1+\Delta)}$
   Указать физический смысл этой величины.
4. При вычислении второй производной следует опустить члены, возрастающие при u→∞ медленнее, чем $ue^{\lambda u}$. Выразить асимптотику второго момента через ξ и η.

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 18.

2. Моменты $\overline{N^k}(t,E)$ представить в виде

$$\overline{\eta^k}(t,s)\left(\frac{E}{E_1}\right)^{ks} e^{k\lambda^1(s)t}$$

И подставив это в уравнения, пренебречь зависимостью $\overline{\eta^k}$ и s от t при дифференцировании и зависимостью s от E' при интегрировании. Использовать стандартные обозначения каскадной теории(1.11), а для сечений – простейшие выражения.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 1.

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi D}\frac{e^{-r/L}}{r}, L = \sqrt{D/\Sigma_c}$$

К РАБОТЕ 2.

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{rl}\left\{\frac{2l^2\left(L^2 - l^2\right)}{cL^2\left(cL^2 + l^2 - L^2\right)}e^{-\frac{r}{L}} + \int_1^\infty e^{-\frac{rs}{l}}\left[1 + \frac{c}{s}\ln\frac{s-1}{s+1} + \frac{c^2}{4s^2}\left(\pi^2 + \ln^2\frac{s-1}{s+1}\right)\right]^{-1} ds\right\}$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 3.

$$\Phi_1(r,\psi) = \frac{(\pi - \psi)\Sigma_s}{(4\pi)^2 r\sin\psi}e^{-\Sigma r\cos\psi} - \frac{\Sigma_s\Sigma}{(4\pi)^2}\ln\left[r^2(1 - \cos\psi)\right]e^{-\Sigma r\cos\psi}$$

$$\Phi_2(r,\psi) = -\frac{\Sigma_s}{64}\ln\left[r^2(1 - \cos\psi)\right]e^{-\Sigma r\cos\psi}$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 4.

$$\Phi(E) = \frac{const}{\Sigma_s(E)E}$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 5.

$$\Phi(z,\lambda) = \left\{\delta(\lambda - \lambda_0) + \sqrt{Cz/(\lambda - \lambda_0)}I_1\left(2\sqrt{C(\lambda - \lambda_0)z}\right)\right\}e^{-\Sigma z}$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 6.

$$\Phi_s(r,\lambda,v) = \frac{1}{2\pi(\lambda - \lambda_0)}e^{-\frac{v^2}{2(\lambda - \lambda_0)}}\Phi_s(z,\lambda)$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 7.

$$\Phi_s(z,\rho) = \Phi_0 e^{-\Sigma(E_0)z}\Xi(E_0)f(\rho),$$

$$f(\rho) = 2\left[(a + \rho)E(k) + (a - \rho)K(k)\right], k = \frac{2\sqrt{\rho a}}{\rho + a}$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 8.

$$\Phi(z,\vec{\rho},\vec{v}) = \frac{12}{\pi^2\left\langle\theta^2\right\rangle z^4}e^{-\frac{4}{z\left\langle\theta^2\right\rangle}\left[v^2 - 3\vec{v}\vec{\rho}/z + 3\rho^2/z^2\right]}$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 9.

$$2\pi\Phi(z,v)\,vdv=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{B^n}f^{(n)}(\tilde v)\,\tilde v d\tilde v,\tilde v=v\big/\chi_c\sqrt{B}$$

$$f^{(n)}(\tilde v)=\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}J_0(\tilde v u)\,e^{-u^2/4}\left[\frac{u^2}{4}\ln\frac{u^2}{4}\right]^n udu$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 10.

$$\overline{v^2}=\frac{E_s^2t}{(E_0-\varepsilon t)\,E_0}\;\overline{\rho^2}=2\frac{E_s^2}{\varepsilon^3}\left[(E_0-\varepsilon t)\ln\frac{E_0-\varepsilon t}{E_0}+\varepsilon t-\frac{(\varepsilon t)^2}{2E_0}\right]$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 11.

$$\Phi(z,\Delta)=\frac{1}{\xi}\varphi(\lambda),$$

$$\lambda=\left\{\Delta-az\left[\ln\frac{az}{Q'}+1-C\right]\right\}\Big/az$$

$$\xi=az,\varphi(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{u\ln u+u\lambda}du$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 12.

$$\Phi(t,E)=\frac{1}{E_0\Gamma(t/\ln 2)}\left(\ln\frac{E_0}{E}\right)^{(t/\ln 2)-1}$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 13. См.1.11.

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 14.

$$N_e(E)=\frac{E_0}{\varepsilon}\xi e^{\xi}\int_{\xi}^{\xi_0}\frac{e^{-x}}{x^2}dx,\xi=\frac{qE}{\varepsilon},\xi_0=\frac{qE}{\varepsilon}$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 15.

$$N_e(t,v,E)=f(v,s)\,N_e(t,E)$$

$$f(v,s)=\frac{1}{2\pi v^{2-s}}\frac{\varsigma^{(2-s)/s}}{2^{(2-s)/s}\Gamma(s/2)}K_{\frac{2-s}{2}}(\varsigma)$$

$$\varsigma=\frac{Ev}{P},P=\frac{E_s}{2\sqrt{q(\lambda_1)}}$$

$$\overline{v_e^2}(t_{\max})=6\frac{P^2}{E^2}=0,65(E_s/E)^2$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 16.

$$\overline{\rho^2} = \frac{s}{2+s}\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^2 \frac{m_0(s,1,-s-2)}{m_0(s,0,-s)}$$

$$f(\rho,s) = \rho^{s-2} b^{-s} \phi(\rho/b,s), b = \sqrt{\overline{\rho^2}/s(s+1)}$$

$$\phi(x,s) = \frac{1}{\pi\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-t^2-x/t} t^{-s+1} dt$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙРАБОТЕ 17.

$$\delta_N^2 \sim \frac{\eta-\xi}{\ln(E/E_1)}$$

К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ 18.

$$\delta_{e\to e}^2 = \frac{2\left\{(\overline{\eta}_\gamma/\overline{\eta}_e) B(s,s+1)\left[2\lambda_1(s)+\sigma_0\right] + B(s+1,s+1)C(2s)\right\}}{\left[2\lambda_1(s)-\lambda_1(2s)\right]\left[2\lambda_2(s)-\lambda_2(2s)\right]}$$